Contribution à l'amélioration de méthodes de discrétisation sans maillage appliquées à la mécanique des milieux continus

Gabriel Fougeron

Directeur :	Denis Aubry	Rapporteurs :	Piotr Breitkopf Nicolas Moës
Encadrement entreprise :	Guillaume Pierrot Anargiros Kamoulakos	Examinateurs :	Francisco Chinesta Ludovic Chamoin

Financement : ESI Group & ANRT (Cifre n° 2015/0280)

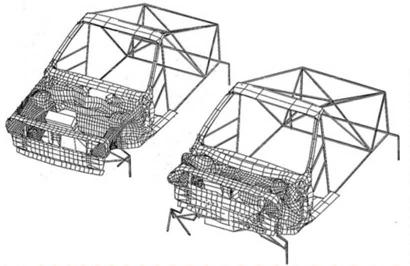
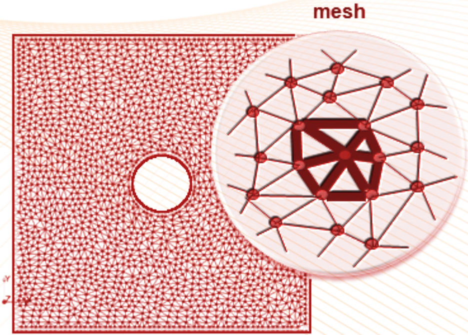


Image reproduite avec la permission de Volkswagen AG.

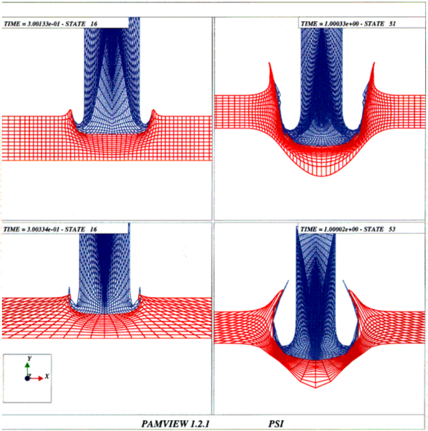
◁ Première simulation industrielle de crash-test complet : Volkswagen Polo (1985)

Simulation de crash frontal Audi A8 (2010) ▷

Image reproduite avec la permission d'AUDI AG

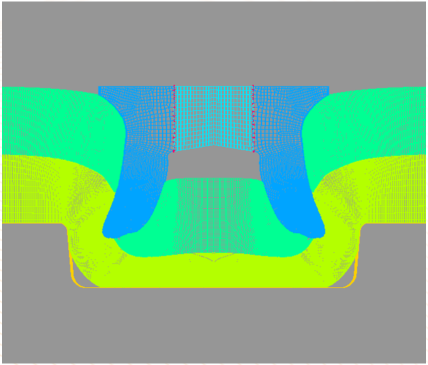


- Tessellation de l'espace
- Notion de dimension d'une cellule (nœud, face, . . .)
- DOFs attachés aux cellules
- Relation d'adjacence entre cellules $\Rightarrow \partial \circ \partial = 0$



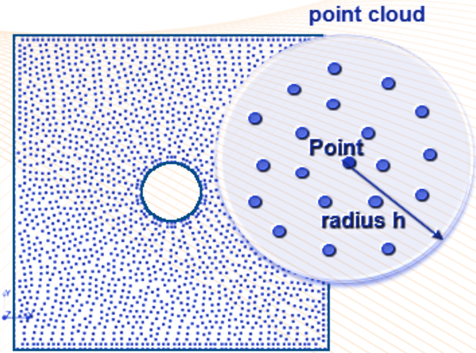
Simulation industrielle de poinçonnage

⚠ Grande dépendance vis à vis du maillage



Simulation industrielle de rivetage

⚠ Changements de topologie



Position des nœuds uniquement

- Que représente un nœud ?
- Représentation des champs discrets ?
- Où est le domaine ? Géométrie ?
- Relier les points du nuage ?

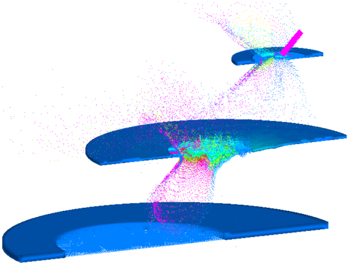
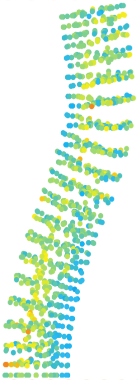


Image reproduite avec la permission

de l'agence spatiale européenne

◁ Simulation d'impact de débris spatiaux
sur le bouclier du module européen
de la station spatiale internationale (1998)

Instabilité en tension dans une
simulation SPH d'une poutre élastique ▷



[Vidal 2004]

L'ambition de cette thèse

- Revenir à des problèmes simples

- Revenir à des problèmes simples
- Proposer des solutions robustes, susceptibles d'être appliquées à des problèmes industriels

- Revenir à des problèmes simples
- Proposer des solutions robustes, susceptibles d’être appliquées à des problèmes industriels
- Deux grands chantiers :

  $\hookrightarrow$ La compatibilité
  $\hookrightarrow$ La discrétisation du bord

- Revenir à des problèmes simples
- Proposer des solutions robustes, susceptibles d’être appliquées à des problèmes industriels
- Deux grands chantiers :

  $\hookrightarrow$ La compatibilité
  $\hookrightarrow$ La discrétisation du bord

  $\hookrightarrow$ Vers une méthode générale ?

1. Compatibilité des opérateurs sans maillage
2. Discrétiser le bord . . . sans nœud au bord ?
3. Les volumes nodaux définissent tous les opérateurs sans maillage

Equation de diffusion :

On cherche $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\forall\, v \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}V = \int_\Omega sv \,\mathrm{d}V + \int_{\partial\Omega} gv \,\mathrm{d}S$$

Equation de diffusion :

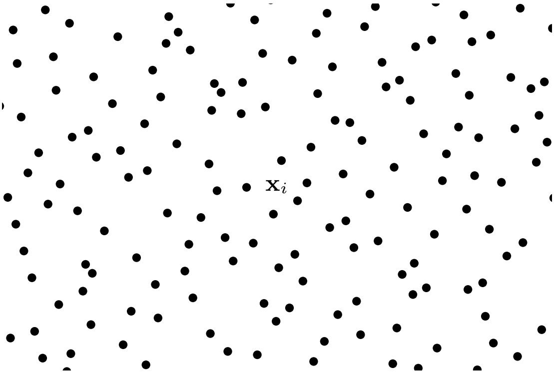
On cherche $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\forall\, v \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}V = \int_\Omega sv \,\mathrm{d}V + \int_{\partial\Omega} gv \,\mathrm{d}S$$

Equilibre entre flux et sources volumiques et surfaciques.

- Evaluation nodale

$$f(\mathbf{x}_i) \longrightarrow f_i$$



Notre cadre sans maillage et ses opérateurs

- Evaluation nodale

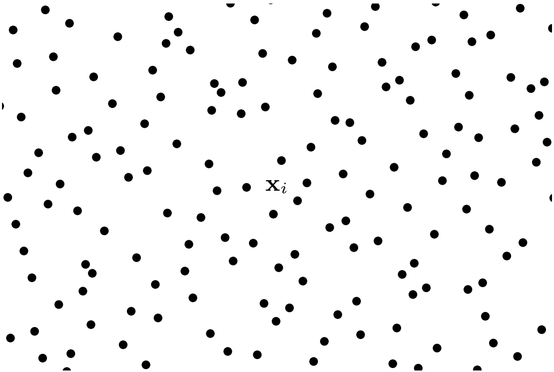
$$f(\mathbf{x}_i) \longrightarrow f_i$$

- Opérateurs nodaux

$$\int_{c}$$

$$\int_{\partial c}$$

$$\nabla$$



Notre cadre sans maillage et ses opérateurs

- Evaluation nodale

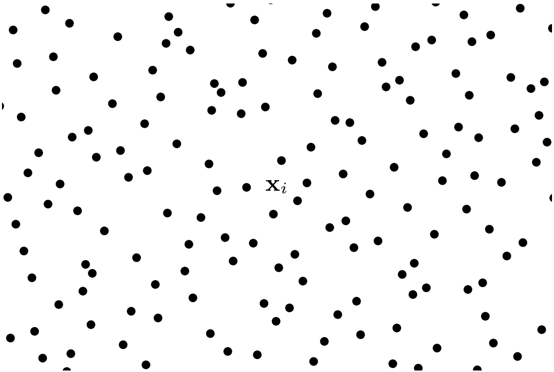
$$f(\mathbf{x}_i) \longrightarrow f_i$$

- Opérateurs nodaux

$$\oint_{\mathcal{C}} \longrightarrow V_i$$

$$\oint_{\partial\mathcal{C}}$$

$$\nabla$$



$$\int_{\mathbf{x}\in\Omega} f(\mathbf{x})\, \mathrm{d}V \longrightarrow \oint_{\mathcal{C}} f \overset{\text{def}}{=} \sum_{i\in\mathcal{C}} V_i f(\mathbf{x}_i)$$

Notre cadre sans maillage et ses opérateurs

- Evaluation nodale

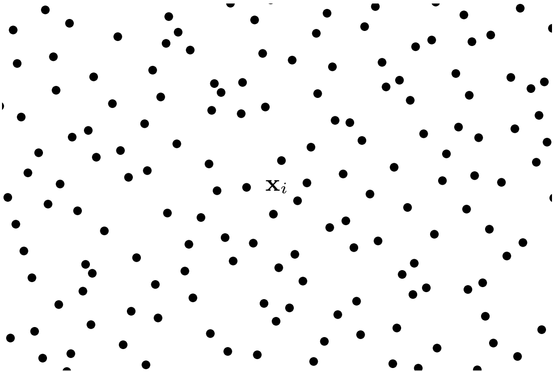
$$f(\mathbf{x}_i) \longrightarrow f_i$$

- Opérateurs nodaux

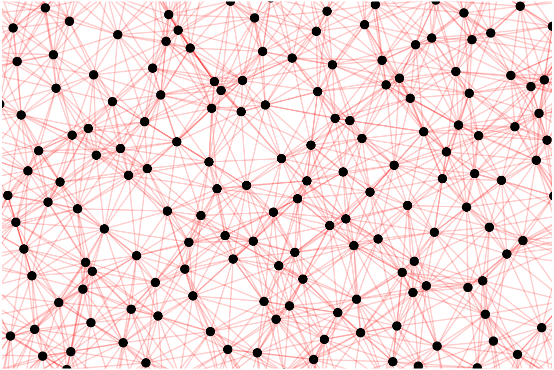
$$\oint_{\mathcal{C}} \longrightarrow V_i$$

$$\oint_{\partial \mathcal{C}} \longrightarrow \boldsymbol{\Gamma}_{i,j}$$

$$\nabla \longrightarrow \mathbf{A}_{i,j}$$



$$V_i \nabla f(\mathbf{x}_i) \longrightarrow V_i \nabla_i f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j \in \mathcal{C}} \mathbf{A}_{i,j} f(\mathbf{x}_j)$$



- Evaluation nodale

$$f(\mathbf{x}_i) \longrightarrow f_i$$

- Opérateurs nodaux

$$\int_{\mathcal{C}} \longrightarrow V_i$$

$$\oint_{\partial\mathcal{C}} \longrightarrow \boldsymbol{\Gamma}_{i,j}$$

$$\mathbb{\nabla} \longrightarrow \mathbf{A}_{i,j}$$

$$V_i \nabla f(\mathbf{x}_i) \longrightarrow V_i \mathbb{\nabla}_i f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j\in\mathcal{C}} \mathbf{A}_{i,j} f(\mathbf{x}_j)$$

Diffusion : discrétisation symétrique discrète sans maillage

On cherche $u : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall\, v : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$

$$\int\!\!\!\!\!\boxed{}_{\mathcal{C}} \nabla u \cdot \nabla v = \int\!\!\!\!\!\boxed{}_{\mathcal{C}} sv + \int\!\!\!\!\!\boxed{}_{\partial\mathcal{C}} gv$$

Equation de diffusion . . . version discrète

Diffusion : discrétisation symétrique discrète sans maillage

On cherche $u : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall\, v : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\mathcal{C}} sv + \int_{\partial\mathcal{C}} gv$$

Discrétiser = Choisir $\int_{\mathcal{C}}$, $\int_{\partial\mathcal{C}}$, et ∇

Patch test linéaire ?

Capture-t-on exactement une solution linéaire $u = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b$?

Deux conditions suffisantes :

Patch test linéaire ?

Capture-t-on exactement une solution linéaire $u = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b$?

Deux conditions suffisantes :

Consistance linéaire

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b) = \mathbf{a}$$

Critère pour juger de la qualité de la discrétisation

Patch test linéaire ?

Capture-t-on exactement une solution linéaire $u = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b$?

Deux conditions suffisantes :

Consistance linéaire

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b) = \mathbf{a}$$

Formule de Stokes

$$\oint_{c} \nabla v = \oint_{\partial c} v$$

Patch test linéaire ?

Capture-t-on exactement une solution linéaire $u = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b$?

Deux conditions suffisantes :

Consistance linéaire

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b) = \mathbf{a}$$

Formule de Stokes

$$\int_C \nabla v = \oint_{\partial C} v$$

Moindre carrés mobiles
[Lancaster et Salkauskas 1981]

Renormalisation
[Randles et Libersky 1996]
[Lanson et Vila 2008]

Erreur d'intégration
[Bonet et Kulasegaram 2000]

"Row-sum condition"
[Babŭska 2008]

Patch test linéaire ?

Capture-t-on exactement une solution linéaire $u = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b$?

Deux conditions suffisantes :

Consistance linéaire

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b) = \mathbf{a}$$

Moindre carrés mobiles
[Lancaster et Salkauskas 1981]

Renormalisation
[Randles et Libersky 1996]
[Lanson et Vila 2008]

Formule de Stokes

$$\oint_{C} \nabla v = \oint_{\partial C} v$$

Erreur d'intégration
[Bonet et Kulasegaram 2000]

"Row-sum condition"
[Babŭska 2008]

Integration par parties $\Rightarrow$ définition du gradient dual ∇^*

$$\int_{C} f\nabla\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\nabla^* f = \oint_{\partial C} f\mathbf{v}$$

Integration par parties $\Rightarrow$ définition du gradient dual ∇^*

$$\oint_C f\nabla\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot{\color{red}\nabla^*} f = \oint_{\partial C} f\mathbf{v}$$

Diffusion symétrique (loin du bord)

$$-\nabla^*\cdot\nabla u = s$$

Integration par parties ⇒ définition du gradient dual ∇^*

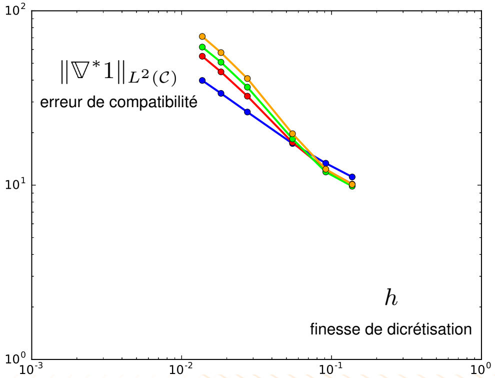
$$\oiiint_c f\nabla\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\nabla^* f = \oiint_{\partial c} f\mathbf{v}$$

Diffusion symétrique (loin du bord)

$$-\nabla^*\cdot\nabla u = s$$

Compatibilité = Consistance duale d'ordre zéro

$$\oiiint_c \nabla\cdot\mathbf{v} = \oiint_{\partial c}\mathbf{v} \quad\Leftrightarrow\quad \nabla^* 1 = \mathbf{0}$$



SPH classique

SPH renormalisé 0

SPH renormalisé 1

Moindres carrés mobiles diffus ordre 1

Observation :

$$\|\nabla^* 1\|_{L^2(\mathcal{C})} \propto h^{-1}$$

Compatibilité = Consistance duale d'ordre zéro

$$\oint_{\mathcal{C}} \nabla \cdot \mathbf{v} = \oint_{\partial \mathcal{C}} \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^* 1 = \mathbf{0}$$

$$\oint_{\mathcal{C}} f \mathbb{V} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_{n_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & & \dots & & \mathbf{A}_{1,n_n} \\ & \ddots & & \iddots & \\ \vdots & & \mathbf{A}_{i,j} & & \vdots \\ & \iddots & & \ddots & \\ \mathbf{A}_{n_n,1} & & \dots & & \mathbf{A}_{n_n,n_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_j \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{n_n} \end{pmatrix}$$

Consistance

$$\oint_{\mathcal{C}} f \mathbb{V} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_{n_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & \cdots & \mathbf{A}_{1,n_n} \\ \ddots & & \iddots \\ \vdots & \mathbf{A}_{i,j} & \vdots \\ \iddots & & \ddots \\ \mathbf{A}_{n_n,1} & \cdots & \mathbf{A}_{n_n,n_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_j \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{n_n} \end{pmatrix}$$

Compatibilité

Consistance

$$\oint_{\mathcal{C}} f \mathbb{V} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_{n_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & & \cdots & & \mathbf{A}_{1,n_n} \\ & \ddots & & \iddots & \\ \vdots & & \mathbf{A}_{i,j} & & \vdots \\ & \iddots & & \ddots & \\ \mathbf{A}_{n_n,1} & & \cdots & & \mathbf{A}_{n_n,n_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_j \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{n_n} \end{pmatrix}$$

Couplage consistance - compatibilité et correction

Compatibilité

Consistance

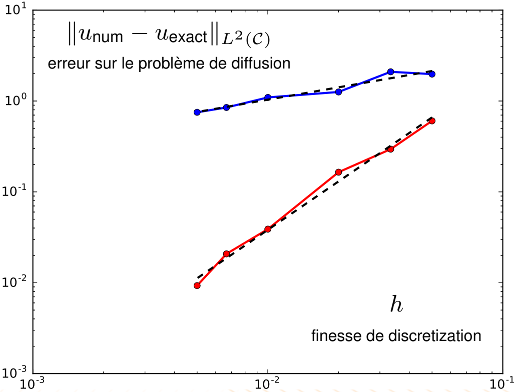
$$\oint_{\mathcal{C}} f \nabla \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_{n_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & & \dots & & \mathbf{A}_{1,n_n} \\ & \ddots & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \vdots & & \mathbf{A}_{i,j} & & \vdots \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \ddots & \\ \mathbf{A}_{n_n,1} & & \dots & & \mathbf{A}_{n_n,n_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_j \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{n_n} \end{pmatrix}$$

Forme nécessaire des gradients linéairement consistants

$$\widetilde{\nabla}_i u = \nabla_i u + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \boldsymbol{\lambda}_{i,j} (u_j - u_i - \nabla_i u \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i))$$

Correction pour la compatibilité : on cherche $\boldsymbol{\lambda}$

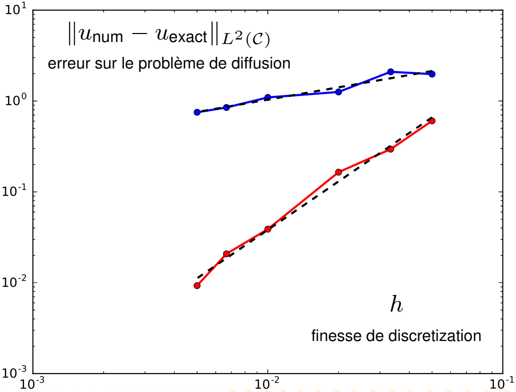
Minimiser $\displaystyle\sum_{i,j \in \mathcal{C}} \frac{1}{W_h(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)} \boldsymbol{\lambda}_{i,j}^2$ sous la contrainte $\widetilde{\nabla}^* 1 = \mathbf{0}$



Gradient SPH renormalisé 1

Non corrigé
Erreur $> 100\%$

Corrigé
$\|u_{\text{num}} - u_{\text{exact}}\| \propto h^{1.77}$



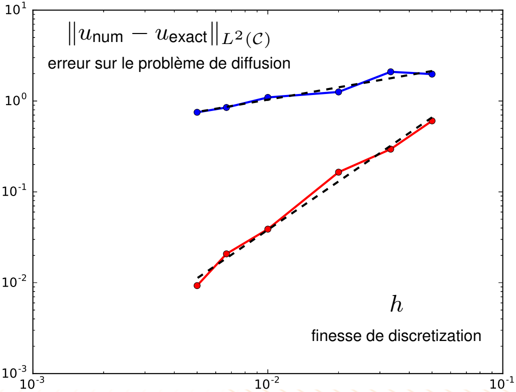
Gradient SPH renormalisé 1

Non corrigé
Erreur $> 100\%$

Corrigé
$\left\|u_{\text{num}} - u_{\text{exact}}\right\| \propto h^{1.77}$

☺ Les plus

- Convergence quasi-optimale



Gradient SPH renormalisé 1

Non corrigé
Erreur $> 100\%$

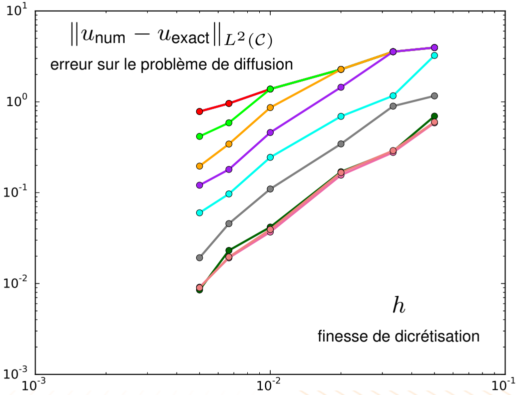
Corrigé
$\left\|u_{\text{num}} - u_{\text{exact}}\right\| \propto h^{1.77}$

☺ Les plus

- Convergence quasi-optimale

☹ Les moins

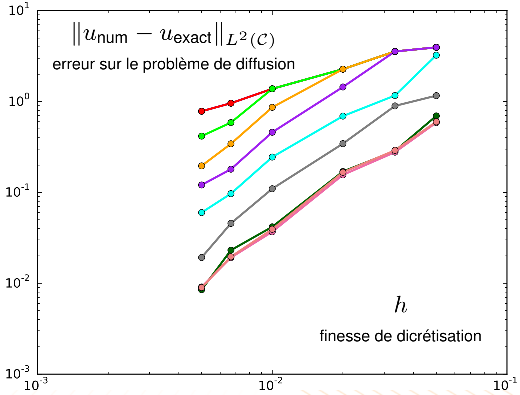
- Coûteux ($\kappa \propto h^{-4}$)



Erreur de compatibilité :

$\|\mathbb{V}^*1\| \leq 50$
$\|\mathbb{V}^*1\| \leq 20$
$\|\mathbb{V}^*1\| \leq 10$
$\|\mathbb{V}^*1\| \leq 5$
$\|\mathbb{V}^*1\| \leq 2$
$\|\mathbb{V}^*1\| \leq 1$
$\|\mathbb{V}^*1\| \leq 0.5$
$\|\mathbb{V}^*1\| \leq 0.2$
$\|\mathbb{V}^*1\| \leq 0.1$

Observation : $\|\mathbb{V}^*1\| = \mathcal{O}(1)$ au lieu de l'habituel $\|\mathbb{V}^*1\| = \mathcal{O}(h^{-1})$
$\Rightarrow$ Convergence optimale !



Erreur de compatibilité :

$\|\nabla^* 1\| \leq 50$

$\|\nabla^* 1\| \leq 20$

$\|\nabla^* 1\| \leq 10$

$\|\nabla^* 1\| \leq 5$

$\|\nabla^* 1\| \leq 2$

$\|\nabla^* 1\| \leq 1$

$\|\nabla^* 1\| \leq 0.5$

$\|\nabla^* 1\| \leq 0.2$

$\|\nabla^* 1\| \leq 0.1$

[G. Pierrot, G. Fougeron (2015, September) Enforcing differentiation/integration compatibility in meshless methods with nodal integration, *Presented at the IVth International Conference on Particle-Based Methods* Barcelona, Spain]

- Cadre nodal : Discrétiser ⇔ Construire $\oint_{c} \square, \oint_{\partial c} \square, \nabla$

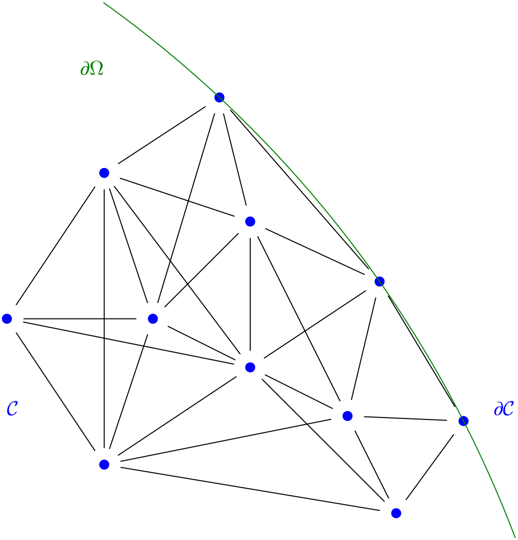
- Cadre nodal : Discrétiser $\Leftrightarrow$ Construire $\oint_{c}, \ \oint_{\partial c}, \ \nabla$
- Consistance + Compatibilité = Convergence optimale

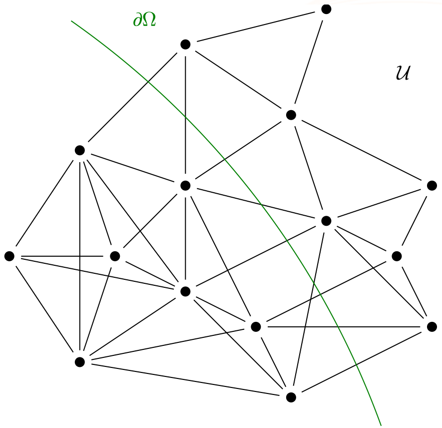
- Cadre nodal : Discrétiser $\Leftrightarrow$ Construire $\int_{c}$, $\int_{\partial c}$, ∇

- Consistance + Compatibilité = Convergence optimale

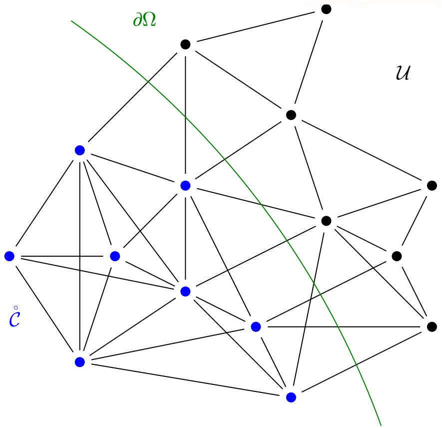
- Compatibilité approchée $\|\nabla^* 1\| = \mathcal{O}(1)$ suffisante !

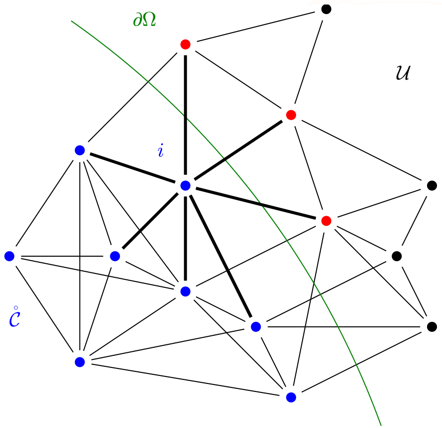
1. Compatibilité des opérateurs sans maillage
2. Discrétiser le bord . . . sans nœud au bord ?
3. Les volumes nodaux définissent tous les opérateurs sans maillage

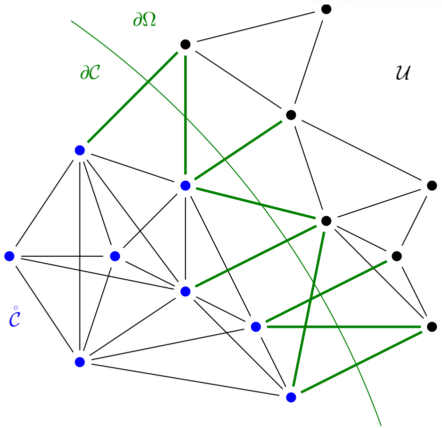

$\partial\Omega$
$\mathcal{C}$
$\partial\mathcal{C}$

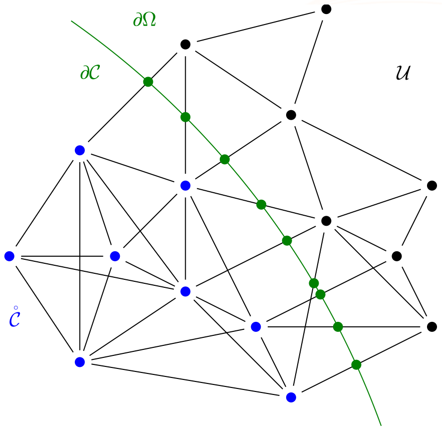

$\partial\Omega$
$\mathcal{U}$

Construire une méthode sans maillage immergée

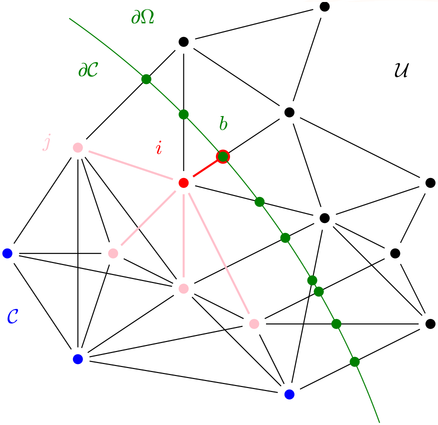



$\partial\Omega$
$\mathcal{U}$
i
$\mathring{\mathcal{C}}$

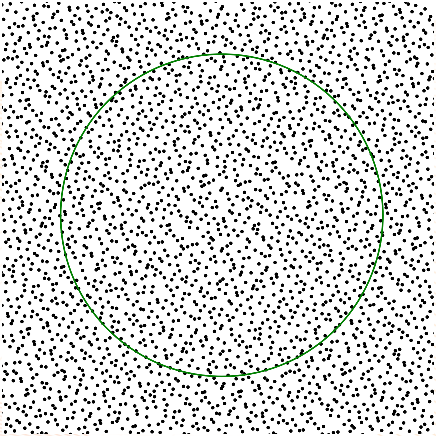

$\partial\Omega$
$\partial\mathcal{C}$
$\mathcal{U}$
$\mathring{\mathcal{C}}$



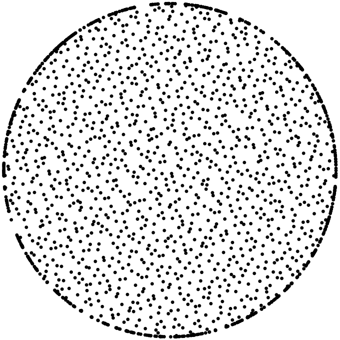
$\partial\Omega$
$\partial\mathcal{C}$
$\mathcal{U}$
$\mathring{\mathcal{C}}$



$$H^1(\mathcal{C}) = \{u : \mathcal{C} \to \mathbb{R} \mid \forall\, b = (i, o) \in \partial\mathcal{C}, u_b = u_i + \nabla_i u \cdot (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_i)\}$$

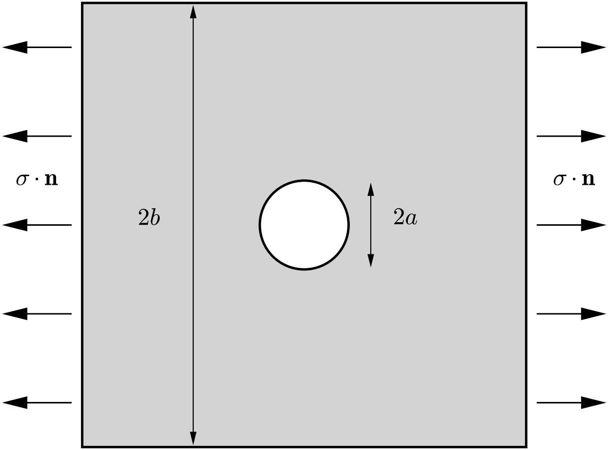


Nuage initial et géométrie



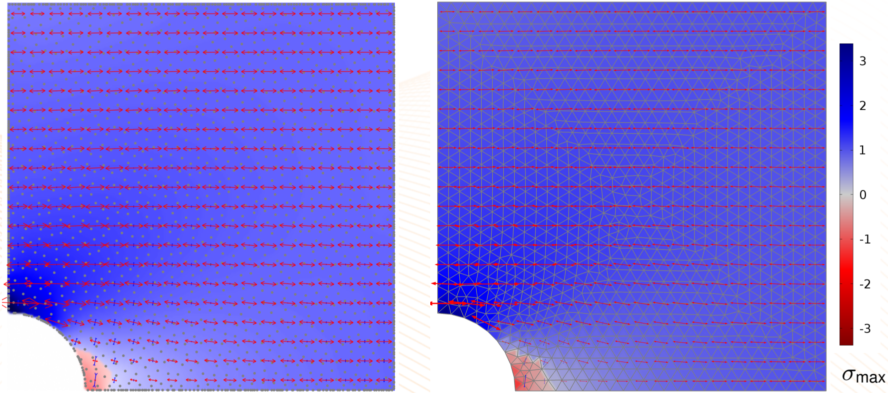
Nuage restreint

Cas-test élastique : plaque percée en tension



Question : parvient-on à capturer la concentration de contraintes ?

Ça marche tout aussi bien que les éléments finis !



Concentration de contraintes théorique : $\dfrac{\sigma_{\text{sup}}}{\sigma_{\text{bord}}} \approx 3.13$ [Pilkey 1994]

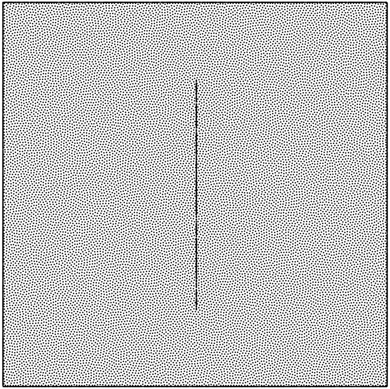
DMLS + Correction compatible
+ restriction nuage (1235 nœuds)

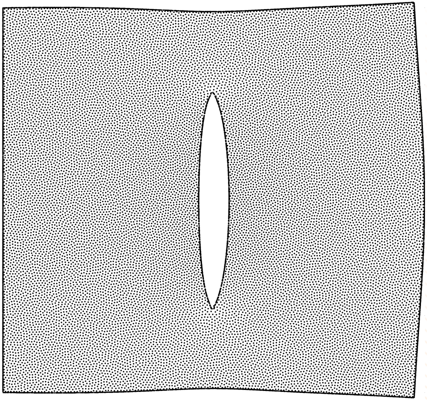
$\dfrac{\sigma_{\text{sup}}}{\sigma_{\text{bord}}} \approx 3.22$ erreur : 2.3%

Elements finis P1 (Comsol)
2111 cellules et 1113 nœuds

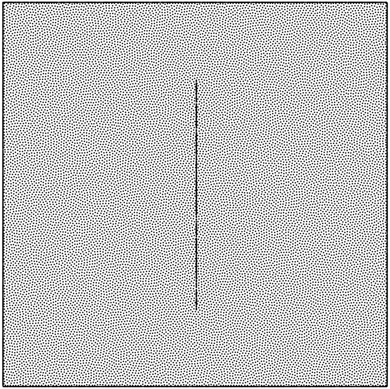
$\dfrac{\sigma_{\text{sup}}}{\sigma_{\text{bord}}} \approx 3.38$ erreur : 8.0%

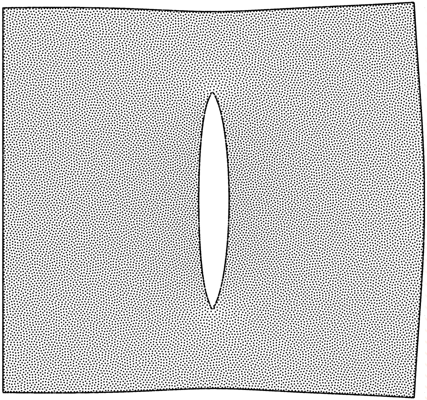
Traitement d'une géométrie difficile : domaine fissuré





Traitement d'une géométrie difficile : domaine fissuré





[G. Fougeron, G. Pierrot, D. Aubry (2017, June) Imposition of natural and essential boundary conditions in embedded meshless methods using nodal integration, *Presented at X-DMS 2017, Umeå University, Sweden*]

[G. Fougeron , D. Aubry (2019) Imposition of boundary conditions for elliptic equations in the context of non boundary fitted meshless methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* volume 343, pages 506-529]

- On a construit une méthode sans maillage à frontière immergée
  $\Rightarrow$ Plus besoin de placer des nœuds au bord !

Original

- On a construit une méthode sans maillage à frontière immergée
  $\Rightarrow$ Plus besoin de placer des nœuds au bord !

Original

- Construction géométrique simple et adaptable aux cas limites

- On a construit une méthode sans maillage à frontière immergée
  $\Rightarrow$ Plus besoin de placer des nœuds au bord !

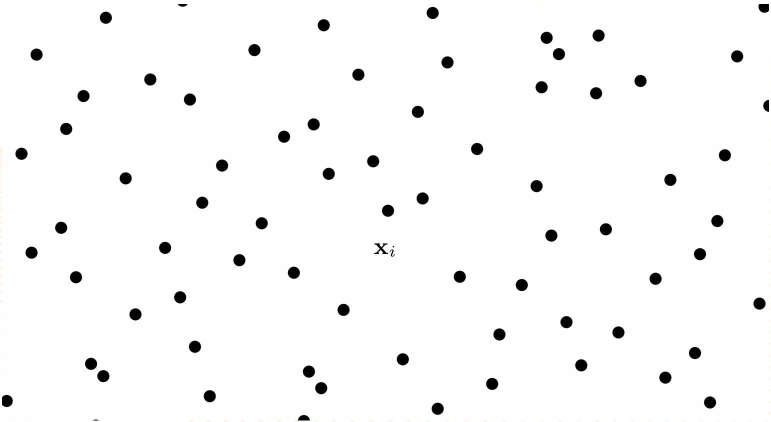
Original

- Construction géométrique simple et adaptable aux cas limites

- Consistance + Compatibilité = Convergence optimale
  $\Rightarrow$ Pas de condition supplémentaire !

1. Compatibilité des opérateurs sans maillage
2. Discrétiser le bord . . . sans nœud au bord ?
3. Les volumes nodaux définissent tous les opérateurs sans maillage

De quoi dépendent les volumes nodaux ?



$$V_i(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_{n_n}, \Omega) \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbf{x}\in\Omega} f(\mathbf{x})\, \mathrm{d}V \approx \oint_{\mathcal{C}} f = \sum_{i\in\mathcal{C}} V_i f(\mathbf{x}_i)$$

Dérivée de Lie : intégrale dans un flot externe

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + f\nabla\cdot\mathbf{v}$$

Un gradient à partir des volumes

Dérivée de Lie : intégrale dans un flot externe

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + f\nabla\cdot\mathbf{v}$$

Équivalent discret : définition de $\triangledown$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\!\!\!\!\!\!\square_{C} f \overset{\mathrm{def}}{=} \int\!\!\!\!\!\!\square_{C} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + f\triangledown\cdot\mathbf{v}$$

[Mikhailova et Shaskov 1986] : Voronoi

[Serrano et Español 2005] : SPH

[Goes *et al.* 2015] : "Power particles" (Voronoi généralisé)

Un gradient à partir des volumes

Dérivée de Lie : intégrale dans un flot externe

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + f\nabla\cdot\mathbf{v}$$

Équivalent discret : définition de $\mathbb{\nabla}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{C}} f \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + f\mathbb{\nabla}\cdot\mathbf{v}$$

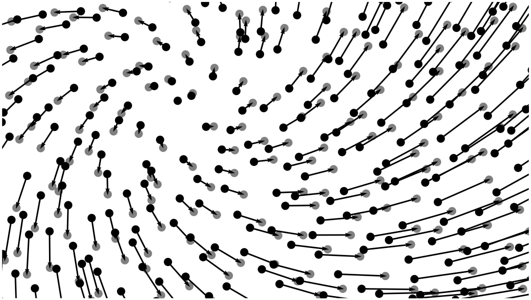
Gradient primal : un volume dans son voisinage

$$V_i\mathbb{\nabla}_i\cdot\mathbf{v} = \sum_{j\in\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}\mathbf{x}_j}\cdot\mathbf{v}_j$$

$$\int_{\phi_\varepsilon(\Omega)} f$$

Changement de variables

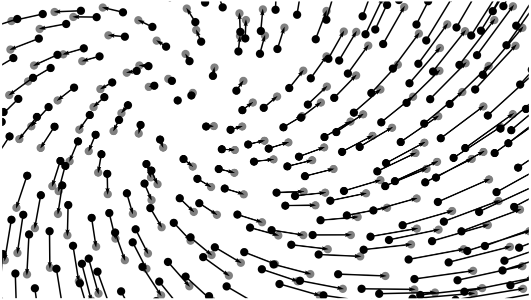
$$=$$



$$\phi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathrm{Fl}^{\mathbf{v}}_\varepsilon(\mathbf{x})$$

$$\int_\Omega f \circ \phi_\varepsilon \det(\mathrm{J}\phi_\varepsilon)$$

$$\begin{tikzcd}
\displaystyle\int_{\phi_\varepsilon(\Omega)} f \arrow[rr, "\text{Discrétisation}"] \arrow[d, leftrightarrow, "="', "\text{Changement de variables}"'] & & \displaystyle\fint_{\phi_\varepsilon(\mathcal{C})} f \arrow[d, leftrightarrow, "\begin{array}{l} = \text{ si } \varepsilon = 0 \\ \neq \text{ en général} \end{array}"] \\
\displaystyle\int_{\Omega} f \circ \phi_\varepsilon \det(\mathrm{J}\phi_\varepsilon) \arrow[rr, "\text{Discrétisation}"'] & & \displaystyle\fint_{\mathcal{C}} f \circ \phi_\varepsilon \det(\mathrm{J}\phi_\varepsilon)
\end{tikzcd}$$



$$\phi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathrm{Fl}^{\mathbf{v}}_\varepsilon(\mathbf{x})$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\displaystyle\int_{\phi_\varepsilon(\Omega)} f \arrow[r, "\text{Discrétisation}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{Changement de variables}"', "="] \arrow[dr, phantom, "\textcolor{red}{\text{Erreur sur } \mathbb{\nabla} \cdot \mathbf{v} \text{ !}}"] & \displaystyle\int_{\phi_\varepsilon(\mathcal{C})} f \arrow[d, leftrightarrow, "\begin{array}{l} = \text{ si } \varepsilon = 0 \\ \neq \text{ en général} \end{array}"] \\
\displaystyle\int_{\Omega} f \circ \phi_\varepsilon \det(\mathrm{J}\phi_\varepsilon) \arrow[r, "\text{Discrétisation}"'] & \displaystyle\int_{\mathcal{C}} f \circ \phi_\varepsilon \det(\mathrm{J}\phi_\varepsilon)
\end{tikzcd}
$$

$$\phi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathrm{Fl}_\varepsilon^{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$$

Gradient primal : erreur et interprétation

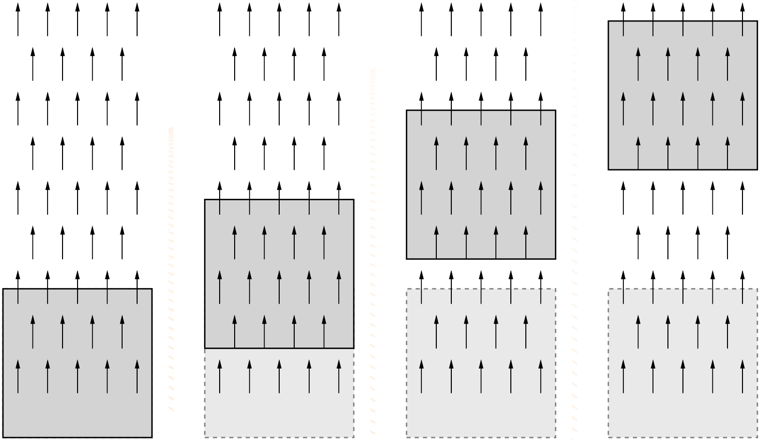
$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\displaystyle\int_{\phi_\varepsilon(\Omega)} f \arrow[r, "\text{Discrétisation}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{Changement de variables}"', "="] & \displaystyle\int_{\phi_\varepsilon(\mathcal{C})} f \arrow[d, leftrightarrow, "\begin{array}{l} = \text{ si } \varepsilon = 0 \\ \neq \text{ en général} \end{array}"] \\
\displaystyle\int_{\Omega} f \circ \phi_\varepsilon \det(\mathrm{J}\phi_\varepsilon) \arrow[r, "\text{Discrétisation}"'] & \displaystyle\int_{\mathcal{C}} f \circ \phi_\varepsilon \det(\mathrm{J}\phi_\varepsilon)
\end{tikzcd}
$$

Exactitude de $\mathbb{V}_i \cdot \mathbf{v}$

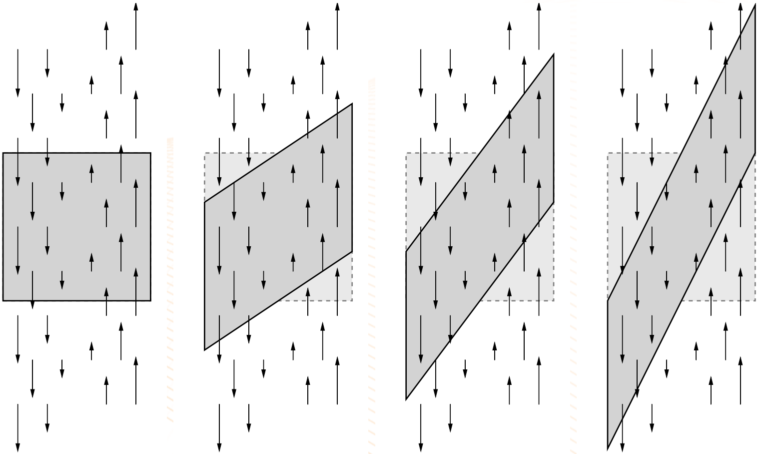
$\Leftrightarrow$

covariance de V_i par rapport à $\mathrm{Fl}^{\mathbf{v}}$

$$\phi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathrm{Fl}^{\mathbf{v}}_\varepsilon(\mathbf{x})$$

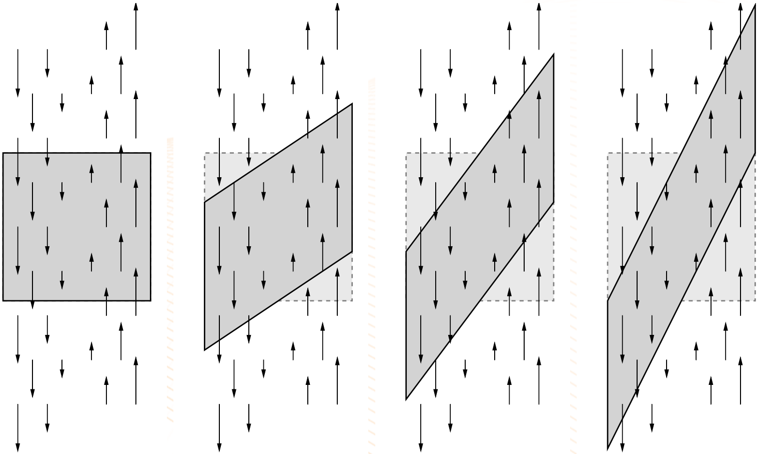


$$\mathbb{\nabla}_i \cdot \mathbf{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V_i(\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}, \cdots, \mathbf{x}_{n_n} + \mathbf{a}, \Omega + \mathbf{a}) = V_i(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_{n_n}, \Omega)$$

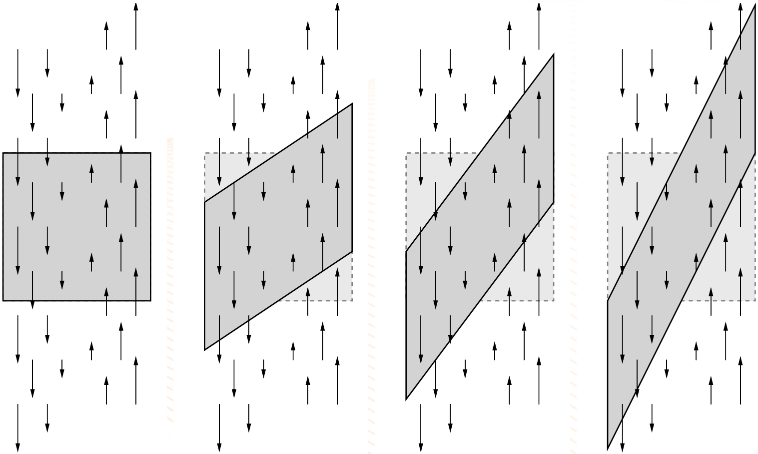


$$\mathbb{V}_i \cdot (\mathrm{B}\mathbf{x}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{B}) \quad \Leftrightarrow \quad V_i(\mathrm{B}\mathbf{x}_1, \cdots, \mathrm{B}\mathbf{x}_{n_n}, \mathrm{B}\Omega) = \det(\mathrm{B}) V_i(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_{n_n}, \Omega)$$

Advection par un champ linéaire



Conjecture : **localité** et **consistance linéaire** sont irréconciliables dans le cas des gradients volumiques



Conjecture : **localité** et **consistance linéaire** sont irréconciliables dans le cas des gradients volumiques

Démontrée avec une hypothèse supplémentaire d'indiscernabilité

Les nœuds entraient la géométrie : dérivation composée

$$
\begin{aligned}
\fint_{\mathcal{C}} f \mathbb{V} \cdot \mathbf{v} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i \in \mathcal{C}} V_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n_n}, \Omega) f_i \\
&= \sum_{i \in \mathcal{C}} f_i \sum_{j \in \mathcal{C}} \left(\frac{\partial V_i}{\partial \Omega} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{x}_j} + \frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{x}_j} \right) \cdot \mathbf{v}_j
\end{aligned}
$$

Les nœuds entraient la géométrie : dérivation composée

$$\oint_{\mathcal{C}} f \mathbb{\nabla} \cdot \mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i \in \mathcal{C}} V_i(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n_n}, \Omega) f_i$$

$$= \sum_{i \in \mathcal{C}} f_i \sum_{j \in \mathcal{C}} \left(\frac{\partial V_i}{\partial \Omega} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{x}_j} + \frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{x}_j} \right) \cdot \mathbf{v}_j$$

Contribution du domaine Ω : intégration au bord

$$\oint_{\partial\mathcal{C}} f \mathbf{v} \overset{\text{def}}{=} \sum_{i,j \in \mathcal{C}} f_i \left(\frac{\partial V_i}{\partial \Omega} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{x}_j} \right) \cdot \mathbf{v}_j$$

Original

Séparer les contributions de Ω et $\mathcal{C}$ dévoile $\oiint_{\partial\Omega}$ et ∇^* !

Les nœuds entraient la géométrie : dérivation composée

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} f\nabla\cdot\mathbf{v} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i\in\mathcal{C}} V_i(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{n_n},\Omega) f_i \\
&= \sum_{i\in\mathcal{C}} f_i \sum_{j\in\mathcal{C}} \left(\frac{\partial V_i}{\partial\Omega}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{x}_j} + \frac{\partial V_i}{\partial\mathbf{x}_j}\right)\cdot\mathbf{v}_j
\end{aligned}
$$

Contribution du domaine Ω : intégration au bord

$$
\oint_{\partial\mathcal{C}} f\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j\in\mathcal{C}} f_i \left(\frac{\partial V_i}{\partial\Omega}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{x}_j}\right)\cdot\mathbf{v}_j
$$

Original

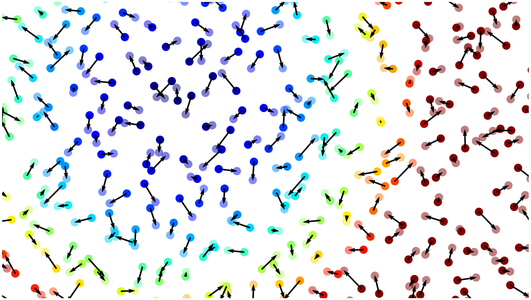
Contribution d'un seul nœud : gradient dual

$$
V_i\nabla_i^* f = -\sum_{j\in\mathcal{C}} \frac{\partial V_j}{\partial\mathbf{x}_i} f_j
$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(\int_{\phi_\varepsilon(\Omega)} f\right)\bigg|_{\varepsilon=0}$$

Théorème de transport de Reynolds

$=$

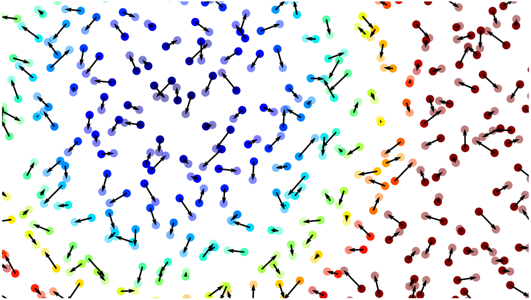


$$f_i = f(\mathbf{x}_i)$$

$$\int_{\partial\Omega} f\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(\int_{\phi_\varepsilon(\Omega)} f\right)\Bigg|_{\varepsilon=0} \xrightarrow{\text{Discrétisation}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(\oint_{\phi_\varepsilon(\mathcal{C})} f\right)\Bigg|_{\varepsilon=0}$$

Théorème de transport de Reynolds $=$



$\neq$ en général

$$f_i = f(\mathbf{x}_i)$$

$$\int_{\partial\Omega} f\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \xrightarrow[\text{Discrétisation}]{} \oint_{\partial\mathcal{C}} f\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(\int_{\phi_\varepsilon(\Omega)} f\right)\Big|_{\varepsilon=0} \arrow[r, "\text{Discrétisation}"] \arrow[d, leftrightarrow, "=" ', "\text{Théorème de transport de Reynolds}" '] & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(\oint_{\phi_\varepsilon(\mathcal{C})} f\right)\Big|_{\varepsilon=0} \arrow[d, leftrightarrow, "\neq \text{ en général}"] \\
\int_{\partial\Omega} f\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \arrow[r, "\text{Discrétisation}" '] & \oint_{\partial\mathcal{C}} f\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}
\end{tikzcd}
$$

Erreur sur $\nabla^* f$!

$$f_i = f(\mathbf{x}_i)$$

Gradient dual : erreur et interprétation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(\int_{\phi_\varepsilon(\Omega)} f\right)\Bigg|_{\varepsilon=0} \xrightarrow{\text{Discrétisation}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(\oint_{\phi_\varepsilon(\mathcal{C})} f\right)\Bigg|_{\varepsilon=0}$$

Théorème de transport de Reynolds

$=$

$\neq$ en général

Exactitude de $\nabla_i^* f$

$\Leftrightarrow$

$\oint_{\mathcal{C}} f$ est indépendant de $\mathbf{x}_i$

$$f_i = f(\mathbf{x}_i)$$

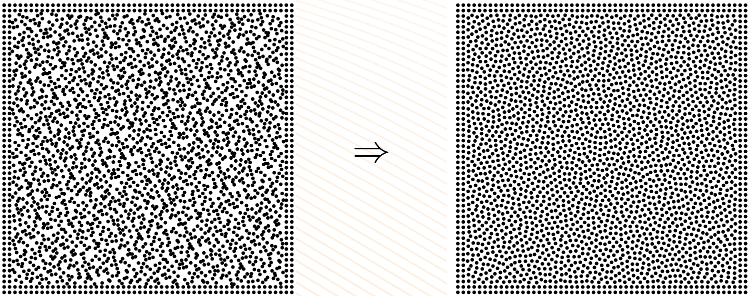
$$\int_{\partial\Omega} f\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \xrightarrow{\text{Discrétisation}} \oint_{\partial\mathcal{C}} f\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$$

Effet stabilisant d'une force de pression uniforme en SPH ?

$$m_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_i}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}_i - V_i \nabla_i^* P_u = \mathbf{f}_i + V_i P_u \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} V_{\text{tot}}$$

Effet stabilisant d'une force de pression uniforme en SPH ?

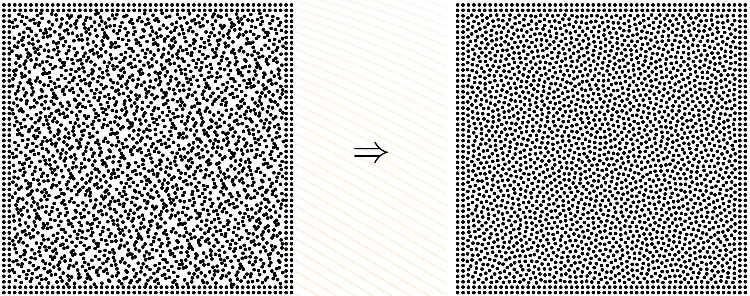
$$m_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_i}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}_i - V_i \nabla_i^* P_u = \mathbf{f}_i + V_i P_u \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} V_{\text{tot}}$$



SPH : $\|\nabla^* 1\| \approx 29.1$ $\Rightarrow$ SPH : $\|\nabla^* 1\| \approx 1$

Effet stabilisant d'une force de pression uniforme en SPH ?

$$m_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_i}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}_i - V_i \nabla_i^* P_u = \mathbf{f}_i + V_i P_u \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} V_{\text{tot}}$$



[G. Fougeron, G. Pierrot, D. Aubry (2016, June) Recovery of differentiation/integration compatibility of meshless operators via local adaptation of the point cloud in the context of nodal integration, *Proceedings of the European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering 2016*]

Reconstruction sans maillage (Ex : MLS)

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{C}} \phi_i(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}_i) \qquad \Rightarrow \qquad V_i = \int_{\mathbf{x} \in \Omega} \phi_i(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}V$$

Reconstruction sans maillage (Ex : MLS)

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{C}} \phi_i(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}_i) \quad \Rightarrow \quad V_i = \int_{\mathbf{x} \in \Omega} \phi_i(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}V$$

☺ Les plus

- $\nabla^* f$ exact si f reproduite

Reconstruction sans maillage (Ex : MLS)

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{C}} \phi_i(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}_i) \qquad \Rightarrow \qquad V_i = \int_{\mathbf{x} \in \Omega} \phi_i(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}V$$

☺ Les plus

- $\mathbb{V}^* f$ exact si f reproduite
- $\mathbb{V} 1 = 0$

Reconstruction sans maillage (Ex : MLS)

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{C}} \phi_i(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}_i) \qquad \Rightarrow \qquad V_i = \int_{\mathbf{x}\in\Omega} \phi_i(\mathbf{x})\, \mathrm{d}V$$

☺ Les plus

- $\mathbb{V}^* f$ exact si f reproduite
- $\mathbb{V}1 = 0$
- Echanger $\mathbb{V}$ et $\mathbb{V}^*$

  $\Rightarrow$ Patch test OK !

Reconstruction sans maillage (Ex : MLS)

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{C}} \phi_i(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}_i) \qquad \Rightarrow \qquad V_i = \int_{\mathbf{x} \in \Omega} \phi_i(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}V$$

☺ Les plus

- $\mathbb{V}^* f$ exact si f reproduite
- $\mathbb{V}1 = 0$
- Echanger $\mathbb{V}$ et $\mathbb{V}^*$

  $\Rightarrow$ Patch test OK !

☹ Les moins

- Calcul de $\int_{\mathbf{x} \in \Omega} \phi_i(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}V$?

Reconstruction sans maillage (Ex : MLS)

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{C}} \phi_i(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}_i) \qquad \Rightarrow \qquad V_i = \int_{\mathbf{x} \in \Omega} \phi_i(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}V$$

☺ Les plus

- $\mathbb{\nabla}^* f$ exact si f reproduite
- $\mathbb{\nabla} 1 = 0$
- Echanger $\mathbb{\nabla}$ et $\mathbb{\nabla}^*$

  $\Rightarrow$ Patch test OK !

☹ Les moins

- Calcul de $\int_{\mathbf{x} \in \Omega} \phi_i(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}V$?
- Conserver la consistance et la compatibilité

Reconstruction sans maillage (Ex : MLS)

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{C}} \phi_i(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}_i) \quad \Rightarrow \quad V_i = \int_{\mathbf{x} \in \Omega} \phi_i(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}V$$

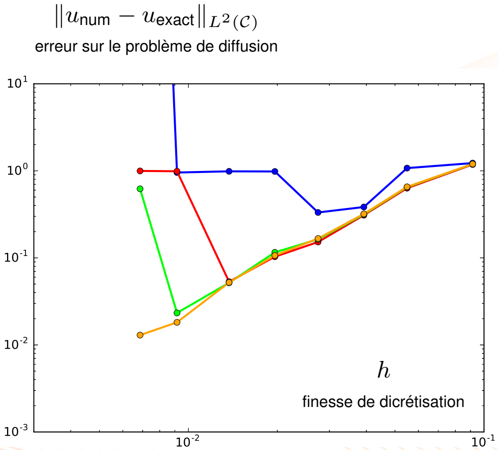
☺ Les plus

- $\mathbb{V}^* f$ exact si f reproduite
- $\mathbb{V} 1 = 0$
- Echanger $\mathbb{V}$ et $\mathbb{V}^*$

  $\Rightarrow$ Patch test OK !

☹ Les moins

- Calcul de $\int_{\mathbf{x} \in \Omega} \phi_i(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}V$?
- Conserver la consistance et la compatibilité
- Utiliser un maillage ?



Maillage d'intégration :

$\approx 2 \times 10^3$ cellules
$\approx 1 \times 10^4$ cellules
$\approx 5 \times 10^4$ cellules
$\approx 1 \times 10^5$ cellules

Convergence optimale . . . tant que l'intégration est assez fine

- La définition de poids volumiques contient à elle seule tous les opérateurs nécessaires
  $\Rightarrow$ Plus de corrections *ad-hoc* en tout genre

Original

- La définition de poids volumiques contient à elle seule tous les opérateurs nécessaires
  $\Rightarrow$ Plus de corrections *ad-hoc* en tout genre

Original

- La consistance du gradient primal ne peut dépasser l'ordre un
- La consistance du gradient dual peut atteindre tout ordre
  $\Rightarrow$ Théoriquement, patch test = OK !

Original

- La définition de poids volumiques contient à elle seule tous les opérateurs nécessaires

  $\Rightarrow$ Plus de corrections *ad-hoc* en tout genre

Original

- La consistance du gradient primal ne peut dépasser l'ordre un
- La consistance du gradient dual peut atteindre tout ordre

  $\Rightarrow$ Théoriquement, patch test = OK !

Original

- On a utilisé un maillage pour transférer consistance et compatibilité au niveau numérique

  $\Rightarrow$ Comment s'en passer ?

Récapitulatifs

- La définition de poids volumiques contient à elle seule tous les opérateurs nécessaires
  $\Rightarrow$ Plus de corrections *ad-hoc* en tout genre

Original

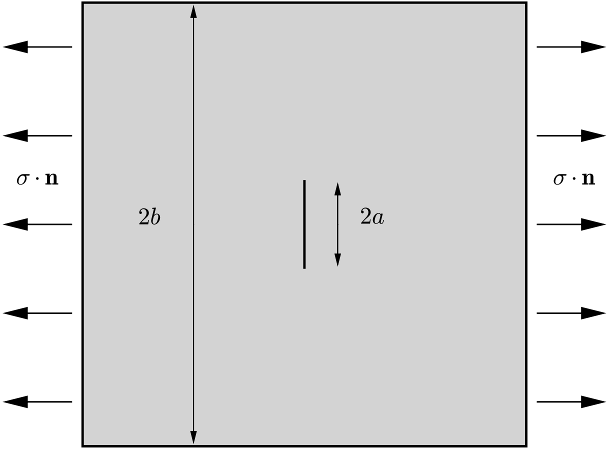
- La consistance du gradient primal ne peut dépasser l'ordre un
- La consistance du gradient dual peut atteindre tout ordre
  $\Rightarrow$ Théoriquement, patch test = OK !

Original

- On a utilisé un maillage pour transférer consistance et compatibilité au niveau numérique
  $\Rightarrow$ Comment s'en passer ?

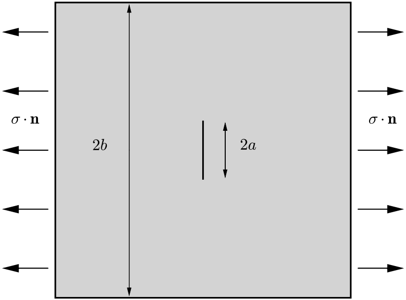
[G. Fougeron, D. Aubry (2018) Volume generalized dependencies : a powerful tool to characterize and generate meshless operators. SIAM Journal on Scientific Computing (Under Review)]

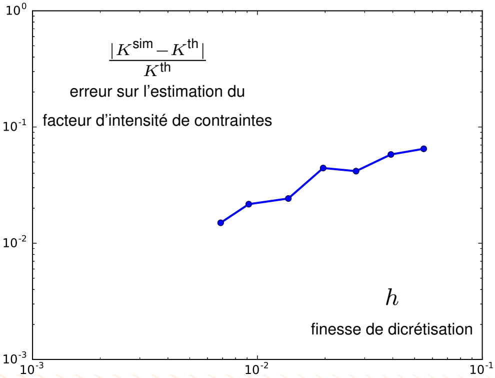
Cas-test élastique : fissure en tension



Question : parvient-on à capturer le facteur d'intensité de contraintes ?
(Important pour prédire la propagation de la fissure)

Facteur d'intensité de contraintes : convergence !





$$\frac{K^{\text{th}}}{\sigma\sqrt{\pi a}} \approx 1.02$$

[Rooke et Cartwright 1976]

Méthode "des volumes" :
Intégration fonctions MLS sur maillage

Estimation par la "méthode theta"
Convergence $\propto h^{0.7}$

- Consistance + Compatibilité (approchée) = Convergence optimale

- Consistance + Compatibilité (approchée) = Convergence optimale

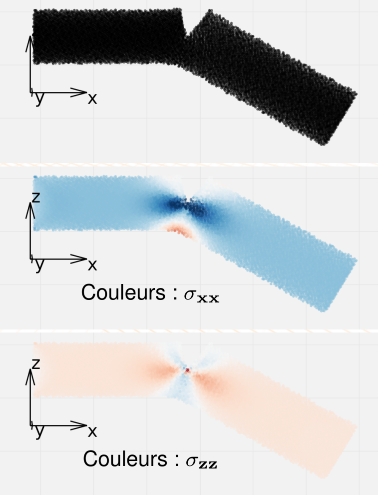
- Une construction géométrique simple permet de capturer le bord en contournant la nécessité de placer des nœuds au bord

Conclusions

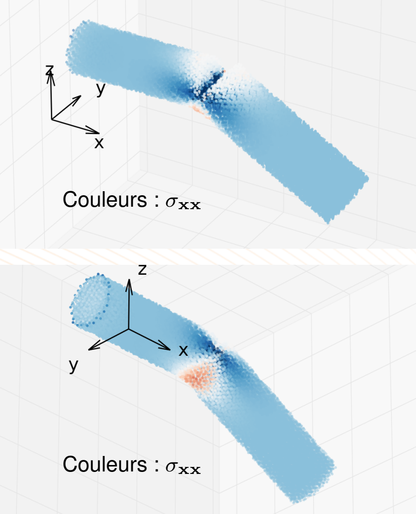
- Consistance + Compatibilité (approchée) = Convergence optimale

- Une construction géométrique simple permet de capturer le bord en contournant la nécessité de placer des nœuds au bord

- La méthode des volumes permet un traitement unifié des questions de consistance, compatibilité et bord



Vue en coupe de profil



Vues de trois-quarts

- Industrialisation : grandes déformations, adaptativité locale du nuage, . . .

Perspectives

- Industrialisation : grandes déformations, adaptativité locale du nuage, . . .
- À quel point les résultats s'étendent ils aux méthodes d'intégration non nodales ?

- Industrialisation : grandes déformations, adaptativité locale du nuage, . . .
- À quel point les résultats s'étendent ils aux méthodes d'intégration non nodales ?
- Pourra-t-on un jour *vraiment* se débarrasser du maillage ?

Merci de votre attention